

Konstruktionselemente aus Kunststoff: Kontaktmechanik von Kunststoffrollen

Zylindrische Laufrollen auf bombiertem Profil

Johannes Kunz,
Manuel Peter

iwk

Institut für Werkstofftechnik
und Kunststoffverarbeitung

Kunststoffrollen mit zylindrischem Laufmantel werden gelegentlich auch auf Schienen eingesetzt, deren Profil bombiert, also leicht konvex gekrümmt ist (Abb. 1). Für die kontaktmechanische Auslegung von Kunststoffrollen in dieser speziellen Kontaktsituation sind nun verlässliche Berechnungsformeln entwickelt worden. Mit ihnen können der Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, die Kontaktfläche, die Abplattung, die maximale Dehnung und die Vergleichsspannung in Funktion der wesentlichen Rollenparameter berechnet werden.

Bombierte Schienenprofile können für zylindrische Rollen etwa dann in Frage kommen, wenn die Auswirkungen eines allfälligen Verkantens der Rollenebene gegenüber der Unterlage zu keinen nennenswerten Auswirkungen führen sollen. Wenn eine Kunststoffrolle mit zylindrischem Laufmantel auf einer quer zur Laufrichtung konvex gekrümmten Unterlage läuft, entspricht dies dem Kontakt zweier rechtwinklig gekreuzter Zylinder mit theoretischer Punktberührung [1, 2]. Für diese Situation sind auf Grundlage der bekannte Hertzschen Theorie der Kontaktprobleme spezifische Berechnungsformeln abgeleitet worden [3]. Diese sind aber auf Laufmantelrollen mit ihrer konkreten Rollengeometrie nicht ohne weiteres anwendbar, da sie insbesondere den Einfluss der Laufmanteldicke nicht berücksichtigen.

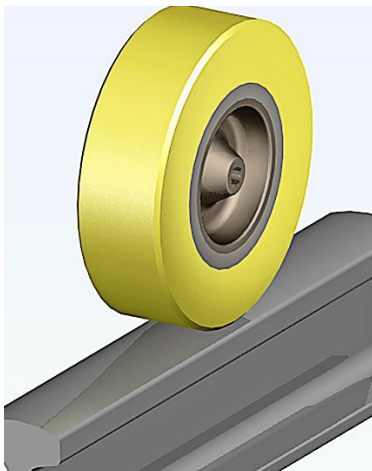


Abb. 1: Kunststoffrolle mit zylindrischem Laufmantel auf Schiene mit bombiertem Profil (CAD-Bild: IWK)

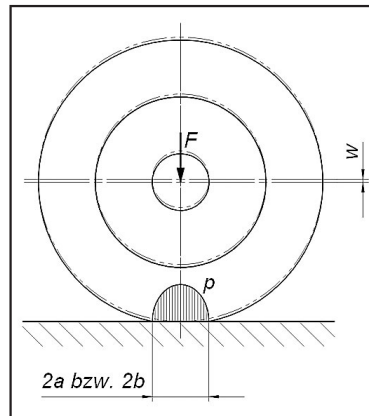


Abb. 2: Größen der Kontaktmechanik a, b: Halbe Kontaktflächenbreite in Umfangsrichtung [mm], p: Kontaktdruck [N/mm²], w: Abplattung [mm].

Im Vordergrund des Interesses stehen der maximale Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, die Abmessungen der Kontaktfläche und die Abplattung, also die axiale Verschiebung des Rollenzentrums gegenüber der Unterlage (Abb. 2), aber auch die maximale Dehnung und die Vergleichsspannung.

Problemstellung und Vorgehen

In der Fachliteratur zum Thema Rollenberechnung sind für diese spezielle Kontaktsituation keine Ansätze zu finden, welche die erwähnten geometrischen Einflüsse der Rollengeometrie mit erfassen würden. So stellte sich die Aufgabe, diese Lücke zu schliessen und Berechnungsformeln zu entwickeln, welche den Anforderungen der Konstruktionspraxis an hinreichende Genauigkeit und einfache Handhabung genügen.

Bearbeitet wurde die Problemstellung auf bewährte Weise mittels rechnerisch-numerischen Methoden in Kombination mit qualitativ-theoreti-

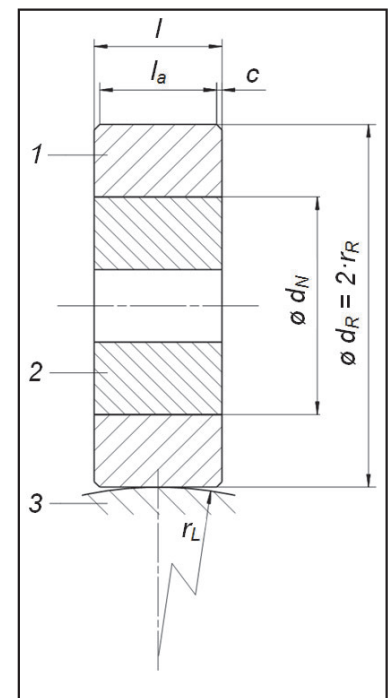


Abb. 3: Geometrie der zylindrischen Laufmantelrollen auf konvex gekrümmter Schiene

- 1: Laufmantel mit zylindrischem Profil und Anfasung bzw. Abrundung
 - 2: Nabe
 - 3: Unterlage (Laufbahn)
- d_R : Rollendurchmesser [mm]
 d_N : Nabendurchmesser [mm]
 r_L : Radius der Unterlage [mm]
 r_R : Rollenradius [mm]
 l_a : Auflagelänge (Laufflächenbreite) [mm]
 l : Rollenbreite [mm]
 c : Kathetenlänge der 45°-Fase [mm].

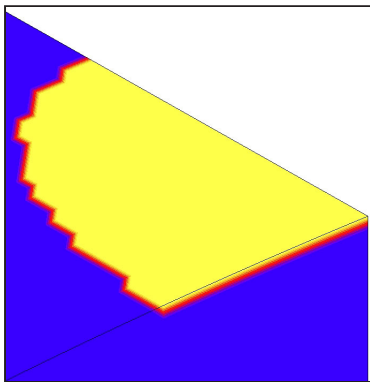


Abb. 4: Kontaktfläche eines Rollenquartels, begrenzt durch die beiden Symmetrieebenen der Problemstellung: unstetiger Verlauf des Randes wegen der FEM-Netzgeometrie ($d_R = 100$ mm; $d_N = 40$ mm, $r_L = 100$ mm; $l_a = 27$ mm; $c = 1,5$ mm x 45° ; $E_C = 3000$ N/mm²; $F = 1000$ N).

- schen Überlegungen. Die wesentlichen Schritte dieses Vorgehens sind:
- die massgeblichen Parameter des Problems identifizieren;
 - die geltenden Gesetzmässigkeiten unter gezielter Variation der Parameter anhand rechnerisch-numerischer Analysen mit der Finite Elemente Methode (FEM) herausarbeiten;
 - mathematisch möglichst einfache, aber hinreichend genaue Berechnungsformeln für die wichtigsten kontaktmechanischen Grössen in Funktion der massgebenden Parameter entwickeln;
 - die Berechnungsformeln anhand neu gewählter Parameter überprüfen

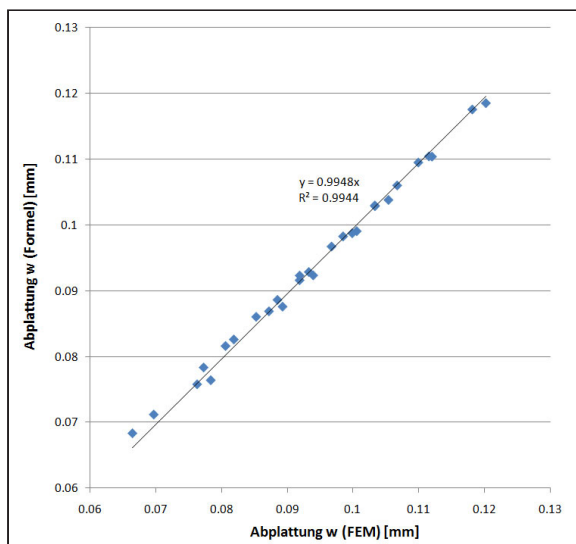


Abb. 5: Abplattung: Vergleich der mit der FEM berechneten und der anhand der Formeln ausgewerteten Resultate. Eine ähnlich gute Übereinstimmung ergab sich auch bei den andern kontaktmechanischen Grössen.

fen und gegebenenfalls anpassen oder deren Gültigkeitsbereich einschränken.

Auf die experimentelle Bestätigung konnte aufgrund der reichen Erfahrung aus vorangegangenen Untersuchungen an Kunststoff-Laufrollen in verschiedenartigen Kontaktsituationen [4, 5] verzichtet werden. Aus Effizienzgründen wurden die FEM-Modelle unter Nutzung der achsialen und radialen Symmetrieeigenschaften auf einen Viertel der jeweiligen Rolle beschränkt.

Voraussetzungen und Idealisierungen

Die Untersuchung geht von einer Reihe von Voraussetzungen und Idealisierungen aus:

- a) der Laufmantel ist von zylindrischer Form, mit Anfasung bzw. Rundungsradius zu den Stirnflächen (Abb. 3);
- b) Laufmantel und Nabe sind von gleicher Zylinderlänge (Rollenbreite), und zwischen ihnen besteht kein Stoffschluss;
- c) der Kunststoff des Laufmantels verhält sich linear viskoelastisch, d.h. die zeitabhängige Werkstoffsteifigkeit, beschrieben durch den Kriechmodul, ist keine Funktion der Last, und es kann das Boltzmannsche Zeitverformungs-Superpositionsprinzip [3] angewendet werden;
- d) allfällige Vorspannungen durch Aufpressen bzw. Umspritzen lassen sich linear überlagern;
- e) die Nabe besteht aus einem Werkstoff vergleichsweise hoher Steifigkeit, so dass ihre Verformung vernachlässigt werden kann;
- f) die Krafteinleitung in die Nabe erfolgt in deren Zentrum;
- g) die Rolle wirkt als reine Laufrolle, d.h. es wirken keine Tangentialkräfte in der Berührungsfläche;
- h) die Unterlage ist in Rollrichtung gerade und quer dazu konvex gekrümmt, hat also zylindrische Gestalt; sie wird als linear elastisch bzw. linear viskoelastisch betrachtet.

Untersuchungen

Die Untersuchungen wurden aus Gründen der Vergleichbarkeit wie bisher an Rollen mit einem Rollendurchmesser $d_R = 100$ mm und der Breite $l = 30$ mm durchgeführt. Mit einbezogen wurde beidseitig auch eine 45° -Fase der Kathetenlänge $c = 1,5$ mm. Für die radial wirkende Kraft wurde mit $F =$

1000 N eine ebenfalls realistische Grösse gewählt. Variiert wurden der Nabendurchmesser ($d_N = 30, 40, 70, 80, 90$ mm) und der Radius der bombierten Unterlage ($r_L = 15, 25, 37,5, 50, 75, 100, 200$ mm). Die Erfassung anderer Grössen ist durch die dimensionslose Auswertung gewährleistet. Der effektive Kriechmodul von POM C natur wurde bereits früher mit $E_C = 3000$ N/mm² experimentell bestimmt. Alle FEM-Rechnungen wurden mit $\mu = 0,35$ als Wert der Poissonzahl durchgeführt. Für die Unterlage (Laufbahn) wurden mit $E_L = 210000$ N/mm² und $\mu = 0,3$ der Elastizitätsmodul und die Poissonzahl von Stahl eingesetzt. Die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse wird dadurch aber nicht eingeschränkt, weil für die Steifigkeit der Werkstoffpaarung der Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$E_V = 2 \cdot \frac{E_C \cdot E_L}{E_C + E_L} \quad (1)$$

für den Kontakt zwischen Kunststoff-Laufmantel (E_C : Kriechmodul in Abhängigkeit der statischen Belastungsdauer) und Laufbahn bzw. Unterlage (E_L : Elastizitätsmodul) massgebend ist. Für die Unterlage können demzufolge auch andere Werkstoffe, insbesondere auch Kunststoffe, mit ihrem jeweiligen Elastizitäts- bzw. Kriechmodul E_L eingesetzt werden. Mit den gewählten Werten ergibt sich $E_V = 5915,5$ N/mm². Dasselbe gilt für die Vergleichs-Poissonzahl

$$\mu_V = \sqrt{\frac{E_C \cdot \mu_L^2 + E_L \cdot \mu_C^2}{E_C + E_L}} \quad (2)$$

der Werkstoffpaarung, deren konkrete Werte sie insgesamt ausdrückt [3]. Im vorliegenden Fall hat sie die Grösse $\mu_V = 0,349$.

Für die Formelentwicklung wurden insgesamt 52 Parametervariationen untersucht. 15 weitere Parametervariationen mit neuen Werten dienen der Überprüfung der Ergebnisse. Gewählt wurden hierfür die Parameterbereiche $500 \text{ N} \leq F \leq 1500 \text{ N}$ für die Kraft, für den Rollendurchmesser $50 \leq d_R \leq 200$ mm und für den Vergleichsmodul $2960 \text{ N/mm}^2 \leq E_V \leq 8000 \text{ N/mm}^2$.

Ergebnisse

Je nach kontaktmechanischer Grösse

konnten die Hertzschen Berechnungsformeln entweder bestätigt oder dann durch geeignete Anpassungsformeln so modifiziert werden, dass sie die konkreten geometrischen Gegebenheiten und deren Einflüsse mit hoher Genauigkeit und doch in einfacher Form erfassen.

Wie erwartet sind die Verhältnisse $r_N/r_R = d_N/d_R$ und $r_L/r_R = 2 \cdot r_L/d_R$ die entscheidenden Geometrieparameter. Dagegen zeigte sich kein merklicher Einfluss der Rollenbreite l und der Fasse, und zwar auch bei der Überprüfung der erarbeiteten Formeln anhand neu gewählter Parameter. Voraussetzung dabei ist allerdings, dass die Rollenbreite deutlich grösser ist als die Ausdehnung der Kontaktellipse in Richtung der Rollachse. Die nachstehend aufgeführten Berechnungsformeln gelten in den Bereichen $0,3 \leq d_N/d_R \leq 0,8$ und $0,3 \leq r_L/r_R \leq 4,0$.

Mit Verwendung des Vergleichsradius

$$R_V = \frac{d_R \cdot d_L}{d_R + d_L} = 2 \cdot \frac{r_R \cdot r_L}{r_R + r_L} \quad (3)$$

und des Krümmungsparameters

$$\eta = \left| \frac{d_R - d_L}{d_R + d_L} \right| = \left| \frac{r_R - r_L}{r_R + r_L} \right| \quad (4)$$

lassen sich die Formeln kompakt und damit übersichtlich darstellen [3].

Die Genauigkeit der Formeln liegt im Bereich von 1,8 bis 3,5%. Sie kann aber, wie die Überprüfung anhand der neuen Parametervariationen zeigt, bei extremen Parameterkombinationen bis auf 10% steigen. Dies ist etwa der Fall, wenn Rollen kleinen Durchmessers mit dünnem Laufmantel und geringem Kriechmodul durch eine hohe Kraft belastet werden.

Maximaler Kontaktdruck

Der maximale Kontaktdruck tritt im theoretischen Berührungspunkt der beiden zylindrischen Oberflächen auf. Über alle untersuchten Parameterbereiche hat sich eine sehr gute Über-

$$p_0 = 0,364 \cdot (1 - \eta^2)^{0,2} \cdot \sqrt[3]{\frac{F}{R_V^2} \cdot \left(\frac{E_V}{1 - \mu_V^2}\right)^2} \quad (5)$$

einstimmung mit dem Ausdruck aus der allgemeinen Hertzschen Theorie herausgestellt. D.h. eine Beeinflussung durch das Durchmesserverhältnis d_N/d_R wurde nicht beobachtet. Die maximale Abweichung zwischen den FEM-Resultaten und den Ergebnissen nach Beziehung (5) beträgt 1,82%.

Kontaktfläche

Nach der Hertzschen Theorie ergibt sich unter Last eine lokale Verformung mit einer Kontaktfläche, die in Lastrichtung betrachtet eine elliptische Gestalt hat. Die Grössen der beiden Halbachsen dieser Kontaktellipse können mit den theoretisch abgeleiteten Formeln

$$a = 1,15 \cdot (1 - \eta^{0,64})^{-0,4} \cdot \sqrt[3]{F \cdot R_V \cdot \frac{1 - \mu_V^2}{E_V}} \quad (6)$$

$$b = 1,15 \cdot (1 - \eta^{0,5})^{0,25} \cdot \sqrt[3]{F \cdot R_V \cdot \frac{1 - \mu_V^2}{E_V}} \quad (7)$$

sehr genau bestimmt werden. Die Auswertung der FEM-Resultate ist methodenbedingt mit einer Unschärfe im Bereich der Elementgrösse behaftet (Abb. 4). Unabhängig davon hat sich ergeben, dass auch hier kein wesentlicher Einfluss des Durchmesserverhältnisses d_N/d_R vorliegt.

Abplattung

Die Abplattung als radiale Verschiebung des Rollenzentrums unter der Last F gegenüber der Unterlage (Abb. 2) hängt merklich vom Durchmesserverhältnis d_N/d_R ab. Dies zeigt sich im erarbeiteten Ausdruck.

$$w \approx 1,31 \cdot (1 - \eta^2)^{0,23} \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{R_V} \cdot \left(\frac{1 - \mu_V^2}{E_V}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - 0,4 \cdot \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^{2,9}} \quad (8)$$

Mit einer maximalen Abweichung von 2,86% gegenüber den FEM-Resultaten werden die verschiedenen Parametereinflüsse sehr gut erfasst (Abb. 5).

Maximale Dehnung

Bei der Dimensionierung der Rolle interessiert vor allem auch die grösste positive Dehnung als massgebendes Kriterium im Kompromiss zwischen möglichst hoher Belastbarkeit und möglichst geringem Rollwiderstand [6]. Sie kann mit der Beziehung

$$\varepsilon_{\max} \approx 0,021 \cdot \frac{p_0}{E_V} \cdot (1 - \eta^{0,71})^{-0,24} \cdot \left(16 + \frac{d_N}{d_R}\right) \quad (9)$$

recht gut erfasst werden. Die maximale Abweichung zu den FEM-Resultaten liegt bei 3,5%. Die maximale Dehnung tritt im Innern des Laufmantels auf (Abb. 6). Am Rand der Kontaktfläche ergeben sich ebenfalls hohe positive Dehnungen. Mit steigendem Durchmesserverhältnis d_N/d_R , von dem sie in etwa linear abhängt, verschiebt sich der Bereich der maximalen Dehnung allerdings mehr und mehr hin zur Nabe.

Spannungen

Zur Beurteilung des räumlichen Spannungszustandes im Kontaktbereich kann eine Vergleichsspannung beigezogen werden [1, 2]. Nimmt man hierzu als Basis die häufig verwendete Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises), so korreliert die Vergleichsspannung recht gut mit dem maximalen Kontaktdruck nach (5) in der Form

$$\sigma_{V \max} \approx 0,6 \cdot p_0 = 0,218 \cdot (1 - \eta^2)^{0,2} \cdot \sqrt[3]{\frac{F}{R_V^2} \cdot \left(\frac{E_V}{1 - \mu_V^2}\right)^2} \quad (10)$$

Mit der Schubspannungshypothese (Tresca) dürfte sich eine ähnliche Grössenordnung in der Proportionalität von $\sigma_{V \max}$ und p_0 ergeben. Die maximale Abweichung von (10) zu den FEM-Resultaten liegt hier bei 3,2%. Eine Steigerung der Genauigkeit bis auf eine maximale Abweichung von 1,1% wäre nur um den Preis einer eher komplizierten Formel zu erzielen, weshalb eine solche als wenig praxistauglich betrachtet und darauf verzichtet wird, sie hier vorzustellen.

Der Grösstwert der Vergleichsspannung tritt erwartungsgemäss im Innern des Laufmantels auf (Abb. 7). Sein Abstand z vom theoretischen Berührungspunkt kann in Abhängigkeit der Halbachsen a und b der Kontaktellipse abgeschätzt werden mit der Beziehung $z \approx a \cdot b / (a + b)$, die der Hälfte des harmonischen Mittelwerts von a und b entspricht.

Fazit

Aus der Untersuchung sind für alle kontaktmechanischen Grössen vergleichsweise einfache Berechnungsformeln hervorgegangen. Die dabei erzielte Genauigkeit ist bemerkenswert hoch. Die Formeln basieren auf der allgemeinen Hertzschen Theorie der Kontaktprobleme. Während diese theoretischen Formeln beim maxima-

len Kontaktdruck und bei den Halb-achsen der Kontaktellipse direkt übernommen werden können, bedurften sie für die Abplattung einer Erweiterung durch einen Anpassungs-term. Dieser berücksichtigt den Einfluss der Laufmanteldicke mit dem Durchmesser Verhältnis d_N/d_R . Die For-

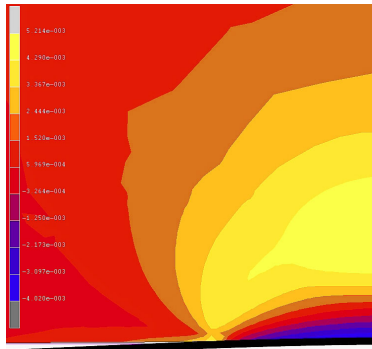


Abb. 6: Grösste positive Dehnung: Je nach Durchmesser Verhältnis d_N/d_R am Rand der Kontaktfläche oder im Innern des Laufmantels.

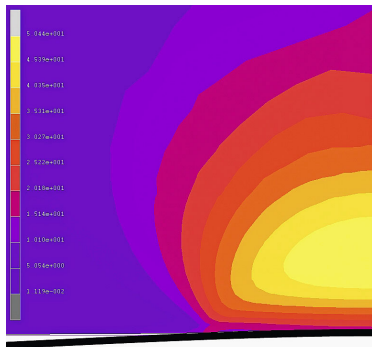


Abb. 7: Maximum der Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises) im Innern des Laufmantels.

meln für die grösste positive Dehnung und für die maximale Vergleichsspannung wurden empirisch entwickelt. Beide zeigen eine gute Korrelation zum maximalen Kontaktdruck.

Die hier präsentierten Ergebnisse ergänzen die bisher erarbeiteten, seit 2005 publizierten Beiträge zum Thema Kontaktmechanik von Kunststoff-Laufrollen in den unterschiedlichen Kontaktsituationen [6, 7]. Mit den dazu gezielt entwickelten Berechnungsformeln steht den Fachleuten bei der Bauteilentwicklung ein Instrumentarium zur Verfügung, das die unkomplizierte Berechnung der massgebenden Grössen bei der kontaktmechanischen Auslegung erlaubt, ohne gleich aufwändige FEM-Berechnungen durchführen zu müssen. Darüber hinaus zeigen die Formeln die Zusammenhänge unter den verschiedenen Parametern auf und ermöglichen, deren Einflüsse qualitativ abzuschätzen.

Literatur

- [1] GROTHE, K.-H., FELDHUSEN, J. (Hrsg.): Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer Verlag Berlin, 23. Aufl., 2011
- [2] CZICHOS, H., HENNECKE, M. (Hrsg.): Hütte – Das Ingenieurwissen. Springer Verlag Berlin, 33. Aufl., 2008
- [3] KUNZ, J.: Kontaktprobleme und ihre praktische Lösung. Konstruktion 61 (2009) 11/12, S. 54 – 58; Korrigendum dazu in Konstruktion 63 (2011) 7/8, S. 82
- [4] KUNZ, J.: Laufrollen kontaktmechanisch auslegen. Kunststoffe 99 (2009)11, S. 71-76
- [5] KUNZ, J.: Kunststoff-Laufmantelrollen und ihre kontaktmechanische Auslegung. In: KISSsoft AG (Hrsg.): Schweizer Maschi-

nenelemente Kolloquium 9./10. November 2010 Rapperswil, Tagungsband. TUDpress, Verlag der Wissenschaften GmbH, Dresden 2010

- [6] KUNZ, J.: Zur kontaktmechanischen Auslegung von Kunststoff-Laufrollen. Konstruktion 63 (2011) 7/8, S. 67 – 71
- [7] KUNZ, J.: Laufrollen. In: KUNZ, J., MICHAELI, W., HERRLICH, N., LAND, W. (Hrsg.): Kunststoffpraxis: Konstruktion, WEKA Media GmbH Kissing, Aktualisierungsstand April 2011

Autoren

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im MAS-Studiengang Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz

Manuel Peter, BSc FHO in Maschinentechnik, wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil

Verdankung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekts «Berechnung von Kunststoffkonstruktionen». Für dessen Förderung danken die Verfasser dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil.